7 класс

Задача 1. Ньют хочет перевезти девять фантастических тварей весом 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 и 10 кг в трёх чемоданах, по три твари в каждом. Каждый чемодан должен весить меньше 20 кг. Если вес какой-нибудь твари будет делиться на вес другой твари из того же чемодана, они подерутся. Как Ньюту распределить тварей по чемоданам, чтобы никто не подрался? **[*4 балла*]**

(*М.А. Евдокимов, И.В. Раскина*)

Ответ. В первый чемодан посадить тварей весом 10, 4, 3 кг; во второй — 9, 7, 2; в третий — 8, 6, 5.

Комментарий. Найти ответ (и доказать, что он единственен) можно следующим образом. Тварей с весами 10, 9 и 8 кг необходимо поместить в разные чемоданы (иначе один чемодан будет слишком тяжёлым). Далее, чтобы никто не подрался, тварь весом 2 кг необходимо поместить во второй из этих чемоданов, а тогда тварь весом 4 кг — в первый. После этого нетрудно распределить и оставшихся тварей.

Задача 2. На завтрак группа из 5 слонов и 7 бегемотов съела 11 круглых и 20 кубических арбузов, а группа из 8 слонов и 4 бегемотов — 20 круглых и 8 кубических арбузов.

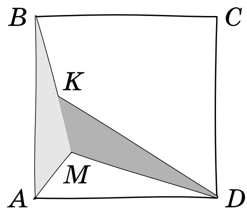
Все слоны съели поровну (одно и то же целое число) арбузов. И все бегемоты съели поровну арбузов. Но один вид животных ест и круглые, и кубические арбузы, а другой вид привередливый и ест арбузы только одной из форм. Определите, какой вид (слоны или бегемоты) привередлив и какие арбузы он предпочитает. **[*5 баллов*]**

(*М.А. Хачатурян*)

Ответ. Слоны едят только круглые арбузы.

Решение. Выясним сначала, сколько арбузов ест на завтрак каждое из животных. По условию 5 слонов и 7 бегемотов съедают 31 арбуз, а 8 слонов и 4 бегемота — 28 арбузов. Мы видим, что если заменить трёх бегемотов на трёх слонов, то требуется на три арбуза меньше. Значит, 12 слонов съели бы $31-7=24$ арбуза (т.е. каждый по 2), а 12 бегемотов $31+5=36$ арбузов (т.е. каждый по 3).

В первой группе бегемоты съели $7\cdot 3=21$ арбуз. Столько арбузов одной формы не было, значит, бегемоты едят арбузы любой формы, а привередливы слоны. Во второй группе слоны съели $8\cdot 2=16$ арбузов. Столько кубических арбузов не было, значит, слоны предпочитают именно круглые арбузы.



Задача 3. Два равных треугольника расположены внутри квадрата, как показано на рисунке. Найдите их углы.

[***6 баллов***] (*Е. В. Бакаев*)

Ответ. 120°, 45°, 15°.

Решение. Заметим, что треугольник MAD тоже равен треугольнику MAB — по трём сторонам: сторона MA у них общая, $AD = AB$ как стороны квадрата, $MD = MB$ по условию (лежат напротив соответственных углов в равных треугольниках).

Значит, $\angle BAM = \angle MAD = 90^\circ/2 = 45^\circ$. В точке M сходятся три соответственных угла равных треугольников, поэтому $\angle AMB = 360^\circ/3 = 120^\circ$. Сумма углов треугольника равна 180°, значит, $\angle ABM = 180^\circ - 120^\circ - 45^\circ = 15^\circ$.

Задача 4. Имеется три кучки по 40 камней. Петя и Вася ходят по очереди, начинает Петя. За ход надо объединить две кучки, после чего разделить эти камни на четыре кучки. Кто не может сделать ход — проиграл. Кто из играющих (Петя или Вася) может выиграть, как бы ни играл соперник? [***6 баллов***] (*А. В. Шаповалов*)

Ответ. Вася.

Комментарий. На самом деле это игра-шутка: Вася выигрывает вне зависимости от действий игроков.

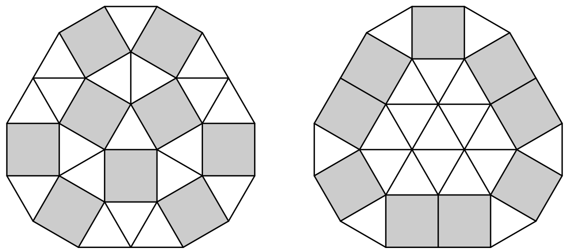
Решение. За ход две кучи заменяются на четыре, т.е. число куч увеличивается на 2. А сколько будет куч, когда игра закончится? В начале число куч было нечётным, поэтому, увеличиваясь на два, оно всё время будет оставаться нечеёным.

Если очередной ход сделать нельзя, то в двух самых больших кучках в сумме не более 3 камней. Тогда во всех остальных кучках по 1 камню и их не менее $120 - 3 = 117$ штук. То есть всего должно быть (хотя бы) 119 куч.

Но чтобы получить 119 куч, надо сделать $(119 - 3) : 2 = 58$ ходов. Это число чётно, значит, последний ход сделал Вася (и он выиграл).

Задача 5. Максим сложил на столе из 9 квадратов и 19 равносторонних треугольников (не накладывая их друг на друга) многоугольник. Мог ли периметр этого многоугольника оказаться равным 15 см, если стороны всех квадратов и треугольников равны 1 см? [***9 баллов***] (*М. А. Волчкевич*)

Ответ. Да, мог (см. рис.).



Комментарии. 1. Сложность тут в том, что предлагается сложить фигуру довольно маленького периметра: даже если складывать многоугольник только из квадратов, то получится периметр не меньше 12 см, а надо ещё добавить целых 19 треугольников.

Из всех фигур, имеющих данную площадь, наименьший периметр имеет круг. Поэтому если такой многоугольник существует, то, видимо, он должен быть близок к кругу.

Кстати, можно подсчитать, что периметр круга, равновеликого нашему многоугольнику, составляет примерно 14,7 см. Так что получить многоугольник ещё меньшего периметра невозможно.

2. Угол при вершине квадрата — половина развёрнутого, а при вершине правильного треугольника — треть развёрнутого. Поэтому во внутренней вершине могут сходиться либо 6 треугольников, либо 3 треугольника и 2 квадрата, либо 4 квадрата (это помогает проверить, возможна ли в действительности нарисованная неточно от руки картинка).

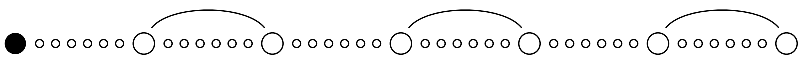
Задача 6. В ряд лежат 100 монет, часть — вверх орлом, а остальные — вверх решкой. За одну операцию разрешается выбрать семь монет, лежащих через равные промежутки (т.е. семь монет, лежащих подряд, или семь монет, лежащих через одну, и т.д.), и все семь монет перевернуть. Докажите, что при помощи таких операций можно все монеты положить вверх орлом. **[*9 баллов*]**

(***С. И. Токарев, А. В. Шаповалов***)

Решение. Ясно, что достаточно научиться переворачивать каждую из монет (сохраняя положение остальных).

Покажем сначала, как перевернуть пару монет, между которыми лежит ровно 6 монет. Если мысленно объединить эту пару с монетами между ними, получится группа из 8 монет подряд. Перевернём в этой группе 7 левых монет, затем 7 правых. Тогда крайние монеты перевернутся по разу, а промежуточные дважды (т.е. вернутся в исходное положение).

Пусть теперь мы хотим перевернуть какую-то одну монету. Будем считать, что она лежит в левой половине (для правой половины рассуждения аналогичны). Посмотрим на семёрку монет, первая из которых — выбранная нами, следующая лежит через 6 монет, следующая ещё через 6 и т.д.



Эта семёрка состоит из выбранной нами монеты и трёх пар, в которых монеты лежат с промежутками в 6. Поэтому мы можем перевернуть каждую из этих пар (как описано выше), а потом всю семёрку. В итоге положение сменит только выбранная монета.

XVII устная городская олимпиада по математике
для 6–7 классов

состоится 24 марта 2019 года.

Подробности и регистрация см.
http://olympiads.mccme.ru/ustn/